



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА  
Российской академии наук

117312, Москва, В-312, пр-т 60-летия Октября, д. 9  
Телефон: (499) 135-24-38      Факс: (499) 783-91-32

E-mail: isa@isa.ru  
http://www.isa.ru

15.10.2014 № 10254-ДС-693

на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
директор Федерального  
государственного бюджетного  
учреждения науки  
Институт системного анализа  
Российской академии наук  
чл.-корр. РАН

Попков Ю.С.

«15» октября 2014 г.



ОТЗЫВ

Институт системного анализа РАН (г. Москва)

на диссертационную работу Белоусова Федора Анатольевича

«К вопросу о существовании и единственности периодических решений для  
дифференциальных уравнений»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальностям 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика»,  
01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное  
управление».

1. Актуальность темы диссертационного исследования.

Диссертационная работа посвящена изучению периодических решений  
дифференциальных уравнений различных классов. Степень значимости этой темы

переоценить сложно, поскольку колебательные процессы и волновые явления играют огромную роль как в самой качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих других научных отраслях, среди которых можно назвать физику (оптика, учение о звуке, радиотехника, небесная механика и т.д.), экономику, биологию, химию и пр.

Сложность данной темы состоит в том, что, с одной стороны, она является хорошо изученной и основные результаты в этой области уже получены. С другой стороны, несмотря на это, единого подхода к изучению периодических решений нет. Существует целый ряд основных подходов, каждый из которых принципиально отличается от других. Метод, наиболее близкий к рассматриваемому в диссертационной работе, это метод интегральных уравнений, который основан на выписывании периодических решений через функцию Грина. Однако в диссертации используется некоторое свое представление периодических решений без использования функции Грина.

## 2. Структура диссертации

Диссертационное исследование включает в себя введение, три главы, библиографический список из 89 наименований на русском и английском языках. Основной текст диссертации изложен на 114 страницах.

**Во введении** обосновывается актуальность темы, оценивается степень ее значимости, сформулированы объект и предмет исследования, определена цель работы, указаны задачи исследования, обосновываются научная новизна, теоретическая и практическая значимость исследования, обосновывается логика изложения материала.

**В первой главе** рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение с нелинейной правой частью следующего вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x),$$

где  $g(\cdot, \cdot)$  - некоторая непрерывная, периодическая по времени функция. Эта глава состоит из трех разделов, в каждой из которых рассматриваются различные варианты линеаризации. В первом разделе изучается простейшая линеаризация, а именно

$$\dot{x}(t) = ax + f(t, x),$$

где  $a$  - некоторая ненулевая константа,  $f(t, x) = g(t, x) - ax$ .

Во втором разделе изучается линеаризация

$$\dot{x}(t) = a(t)x + f(t, x),$$

с использованием заданной периодической функции  $a(\cdot)$ , период которой совпадает по аргументу времени  $t$  с периодом функции  $f(\cdot, \cdot)$ ,  $f(t, x) = g(t, x) - a(t)x$ .

В третьем разделе изучается матричная линеаризация

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t, x),$$

где  $A$  - некоторая невырожденная  $(n, n)$ -матрица, удовлетворяющая специальным условиям и  $f(t, x) = g(t, x) - Ax$ . Отдельно рассмотрен случай  $n=2$ . Для него получены уточненные результаты.

Во всех трех случаях формулируются достаточные условия, обеспечивающие существование единственного периодического решения.

Во второй главе рассматривается квазилинейное обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка следующего вида

$$x^{(n)}(t) = g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}),$$

где  $g(\cdot, \dots, \cdot)$  - некоторая непрерывная, периодическая по времени функция. В этом разделе также отдельно рассматривается случай  $n=2$ , для которого получены уточненные результаты. В диссертации получены условия, выполнение которых гарантирует существование единственного периодического решения для подобного класса дифференциальных уравнений.

В третьей главе изучаются функционально-дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t + \tau_1), \dots, x(t + \tau_s)),$$

где  $f(\cdot, \dots, \cdot)$  - некоторая непрерывная, периодическая по времени функция, область значений которой лежит в пространстве  $R^n$ . Величины  $\tau_1, \dots, \tau_s$  - отклонения аргумента, удовлетворяющие условиям соизмеримости. Для такого уравнения получены условия, обеспечивающие существование единственного периодического решения.

### 3. Научная новизна

Несмотря на изученность периодических решений дифференциальных уравнений, элементом научной новизны можно назвать не стандартную постановку задачи, которая отличается от классической. В новой постановке ставится вопрос о выделении линейной компоненты в правой части дифференциального уравнения так, чтобы, во-первых, решение (в случае его существования) было найдено, во-вторых, чтобы оно было найдено с меньшим числом итераций при заданной точности. В одномерном случае задача была решена более полно, а именно, было получено правило такого выделения линейной части в правой части обыкновенного дифференциального уравнения, при котором для

любой начальной функции рассматриваемый итерационный метод будет находить периодическое решение за меньшее число итераций при заданной точности.

Высокой научной новизной обладает результат, представленный в третьей главе. В этой главе получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Ценность таких условий состоит в недостаточной изученности функционально-дифференциальных уравнений точечного типа и любой новый результат представляет значительный научный интерес.

Важной характеристикой полученных условий, обеспечивающих существование и единственность периодических решений для дифференциальных уравнений является то, что они легко проверямы и могут быть выражены в терминах правых частей исходных дифференциальных уравнений. Более того, все полученные условия вычисляются за конечное число итераций. Исключением в этом смысле являются условия, полученные для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. В этом случае, с заданной точностью, такие условия можно получить, подсчитав сумму из конечного числа слагаемых.

#### **4. Достоверность исследования и полученных результатов, выводов и предложений, сформулированных в диссертации**

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций рассматриваемой работы обеспечивается:

- анализом работ отечественных и зарубежных авторов по данной тематике;
- неопровергимостью результатов, полученных диссидентом и использованных им при подготовке научных докладов, что получили положительную оценку на всероссийских и международных конференциях.

#### **5. Практическая значимость полученных результатов**

Практическая значимость результатов диссертационного исследования определяется следующим:

- Результаты могут быть применены при исследовании периодических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.
- При исследовании различных физических явлений могут возникать объекты имеющие волновой или колебательный характер. Такие объекты зачастую описываются дифференциальными уравнениями, поэтому задачи нахождения периодических решений возникает достаточно часто.

- Данная работа может быть использована в качестве дополнительного материала при прочтении курса дифференциального уравнения в высших учебных заведениях.

## 6. Замечания

Отмечая принципиальные достижения работы, следует указать и ее некоторые недостатки:

1. В работе найден целый ряд опечаток и неточностей.
2. Некоторые из полученных результатов сформулированы слишком громоздко. В основном это относится к результатам второй главы.
3. В приведенных примерах найдены арифметические ошибки, которые, тем не менее, не влияют на сделанные выводы.

## 7. Заключение

В целом диссертационная работа Ф. А. Белоусова на тему «К вопросу о существовании и единственности периодических решений для дифференциальных уравнений», представляет собой законченное научное исследование выполненное автором самостоятельно. Формулировка темы диссертационного исследования адекватно отражает основное содержание работы, соответствует выбранному предмету и методам исследования. Полученные автором результаты достоверны, выводы обоснованы. Отмеченные недостатки не препятствуют высокой оценке теоретической и практической значимости выполненных Белоусовым Ф.А. исследований, полученные в диссертации результаты отвечают поставленным задачам.

Содержание работы соответствует специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика». Автореферат и опубликованные работы полностью отражают содержание диссертации. Научные и практические результаты диссертации представлены в достаточном количестве опубликованных работ (всего 3 работы по теме диссертации). Все основные положения диссертации опубликованы в различных научных изданиях внесенных в Перечень журналов и изданий, утвержденных ВАК РФ. Результаты работы были представлены на международных и всероссийских научных конференциях.

Диссертационная работа Ф.А. Белоусова «К вопросу о существовании и единственности периодических решений для дифференциальных уравнений» соответствует требованиям, установленным Положением о порядке присуждения ученых степеней (утвержденном Постановлением правительства РФ от 30 января 2002 г. №74, в редакции постановления Правительства РФ от 20 июня 2011 г. №475), 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика», 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические

системы и оптимальное управление», а ее автор – Белоусов Ф.А. – заслуживает ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Лаборатории системного анализа и моделирования экономической политики (протокол № 2 от 7 октября 2014 г.).

Главный научный сотрудник  
Лаборатории системного анализа  
и моделирования экономической  
политики ФГБУН ИСА РАН, д.ф.-м.н.

подпись удостоверяю:  
ученый секретарь ФГБУН ИСА РАН,  
к.ф.-м.н.

Ю.Н. Иванов

С.Н. Осипов

